



TITLE:

Option-Implied Long Term Interest Rate Expectations and Demand Supply Balance in JGB-Market (Financial Modeling and Analysis)

AUTHOR(S):

木村, 真樹; 山田, 哲也

CITATION:

木村, 真樹 ...[et al]. Option-Implied Long Term Interest Rate Expectations and Demand Supply Balance in JGB-Market (Financial Modeling and Analysis). 数理解析研究所講究録 2015, 1933: 107-120: KJ00009635840.

ISSUE DATE:

2015-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/223647>

RIGHT:

Option-Implied Long Term Interest Rate Expectations and Demand Supply Balance in JGB-Market

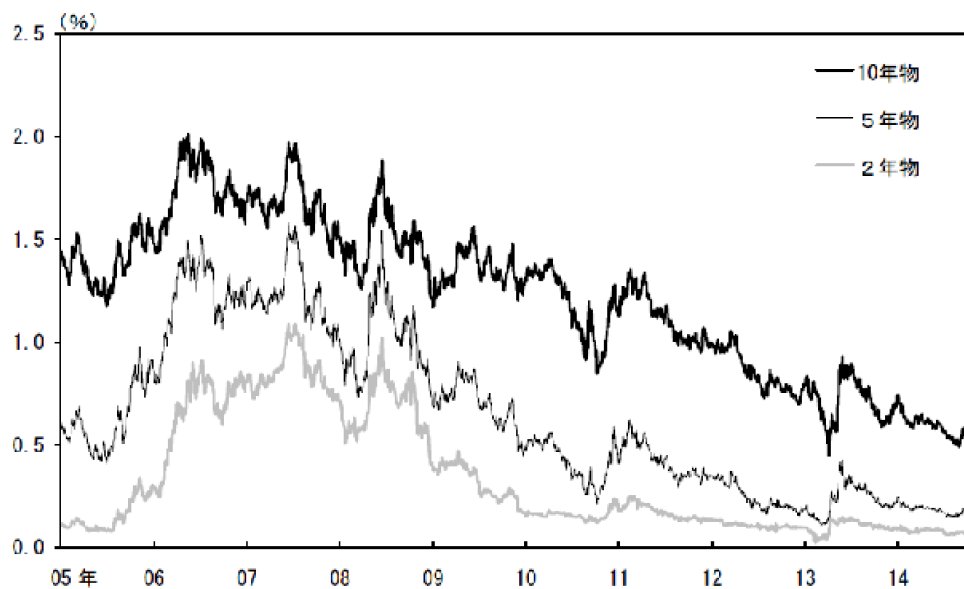
日本銀行¹ 木村 真樹、山田 哲也
Masaki Kimura and Tetsuya Yamada,
Bank of Japan

1. Introduction

日本の長期金利の動向をみると、07 年のサブプライム問題、08 年のリーマンショック以降、概ね低下傾向にあります（図表 1）。特に、2013 年以降は、景気が回復傾向にある中でも、長期金利が上昇する気配はありません。通常、景気回復局面であれば、長期金利はそれを映じて上昇する傾向にありますが、それとは対極的な状況です。実際、前回景気回復期の 2005 年頃に長期金利が上昇傾向にあったことと対照的です（図表 1）。本稿では、こうした問題意識のもと、長期金利の動向を景気動向だけでなく「国債市場の需給」（中央銀行の金融政策の効果）に着目して分析を行ったものです。

（図表 1）

JGB interest rate



¹ 本研究は筆者たち個人に属し、筆者たちの所属する機関の見解を示すものではない。また、ありうべき誤りはすべて筆者たち個人に属する。

1-1. Long Term interest rate : Theoretical aspect

まず、長期金利と経済成長率の関係を理論的側面から、改めて整理しておく、一般的には、将来の期待インフレ率と実質成長率、すなわち、経済の名目成長率に連動して動くことが多くの理論的研究・実証的研究で知られています。

i : nominal interest rate, π : inflation rate, g : real economic growth rate

$$i = E\pi + Eg \quad (1)$$

この関係式は、例えば、C-CAPM (Consumption-CAPM) から導出されます。すなわち、各期において投資家が消費 c_t を行うか、それともそれを投資に回して資産 A_t を増やすか (この利潤が名目金利 r_t に該当)、選択する問題を考えることで、名目金利 r_t と実質成長率 (ここでは c_t の成長率) の関係が得られます。

c_t : consumption A_t : asset r_t : nominal interest rate

$$\begin{aligned} U &= \max_{c_t} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t E_{t-1}(U(c_t)) \\ \text{s.t.} \quad & A_{t+1} = (1 + r_t)A_t - c_t \end{aligned} \quad (2)$$

この問題を解くための Lagrangian は、以下のように定式化されます。

$$L = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t E_{t-1}(U(c_t)) + \sum_{t=0}^{\infty} \lambda_t (A_{t+1} - (1 + r_t)A_t + c_t) \quad (3)$$

これらの First Order Conditions は、以下のようになります。

$$\frac{\partial L}{\partial c_t} = \beta^t E_{t-1}(U'(c_t)) + \lambda_t = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial A_t} = \lambda_{t-1} - (1 + r_t)\lambda_t = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_t} = A_{t+1} - (1 + r_t)A_t + c_t = 0 \quad (6)$$

これらから λ_t を消去すると、

$$U'(c_{t-1}) = \beta E_{t-1}[U'(c_t)(1+r_t)] \quad (7)$$

$U(c_t) = \frac{c_t^{1-\theta}}{1-\theta}$ ($= \log(c_t), \theta = 1$) とすると、

$$1 = \beta E_t \left[\left(\frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{-\theta} \left(\frac{1+i_t}{1+\pi_{t+1}} \right) \right] \quad (8)$$

$$\ln c_t = E_t(\ln c_{t+1}) - \frac{1}{\theta} (i_t - E_t(\pi_{t+1})) \quad (9)$$

$$i_t = \theta E_t(\ln c_{t+1}/c_t) + E_t(\pi_{t+1}) \quad (10)$$

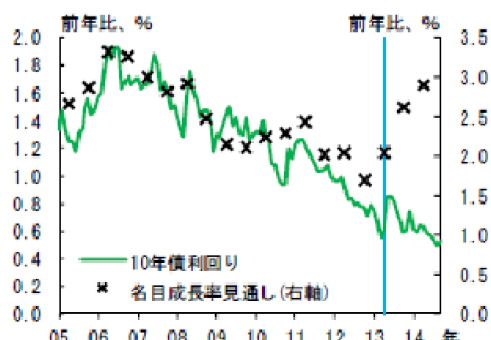
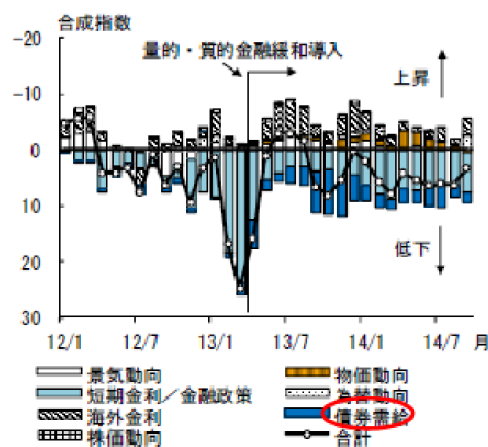
このように、名目金利 i_t は、期待インフレ率 π_t と、消費 c_t の成長率に比例することが示されます。ここでは、消費 c_t の成長率が実質成長率ですので、名目金利 i_t は、実質成長率 $\ln(c_{t+1})/c_t$ とインフレ率 π_t で構成されることが示されます。

1-2. Long Term interest rate : Experimental aspect

この関係式が、日本のケースでどうなっているか示したものが図表2（1）です。長期金利と名目成長率の見通しの関係を見たものです。過去は、この二つが正比例の関係にあって、リーマンショック以降、名目成長率が低下するにともなって長期金利も低下してきましたが、2013年以降は、名目成長率の見通しが上昇（主にCPIの上昇率が高まっているため）しているにもかかわらず、長期金利は低下を続けるという状況にあります。

この背景について、ひとつのヒントとなるのが図表2（2）にあります。これは、市場参加者に債券利回りの変動要因を聞いたものですが、上に行くほど金利の上昇要因を表し、下に行くほど金利の低下要因を表しています。これをみてみますと、2013年の量的質的緩和（QQE といいます）以降、金利低下要因として債券需給というのが目立ち始めていることがわかります。量的質的緩和では、国債をこれまでになく大量に購入していますので、これが大きく国債の需給をひっ迫させ、国債の価格を上昇させて、金利を低下させているというものです。

(図表 2)

(1) エコノミストの名目成長率見通しと
長期金利(2) 市場参加者の注目する債券利回り
変動要因

(注) 1. 市場参加者が「最も注目している変動要因 (有効回答に占める比率)」と「その変動要因が債券利回りに与える影響 (強い低下要因=100、低下要因=75、中立・不明=50、上昇要因=25、強い上昇要因=0として指数化した値から、『中立・不明』である50を引いて算出)」を掛けあわせて作成。

2. 直近の調査期間は9月22～25日。

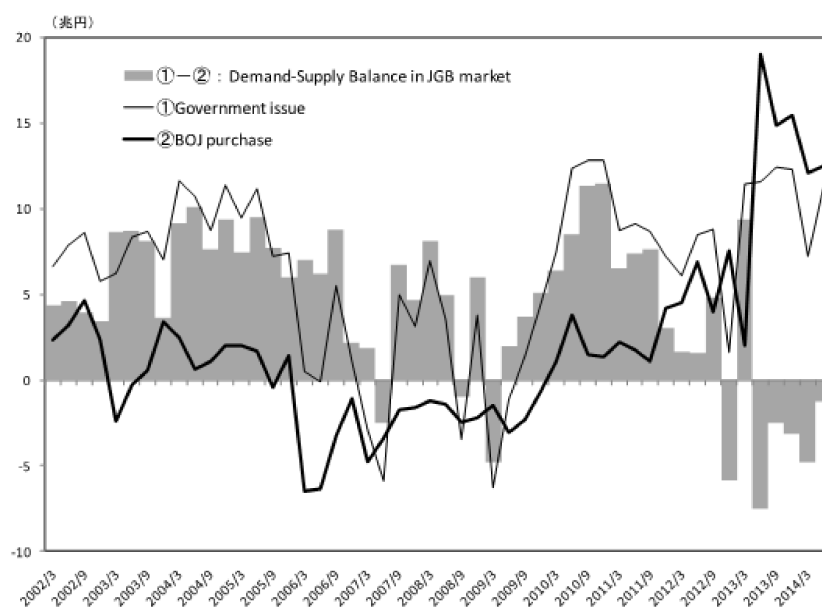
(資料) QUICK「QUICK月次調査<債券>」、日本銀行

実際に国債市場の需給をみてみましょう。図表3は、国債の発行のフローと、それに対して日本銀行がどのくらい購入しているかみたものです (いずれも購入と償還のネットをみたもの)。黒い細線が国債の発行額を表していて、黒い太線が日本銀行の国債の購入額を表しています。その差引がグレーの棒線できて、これが国債市場の普通のプレーヤーに流れる訳です。これをみますと、2013年より以前は、日本銀行の購入額が国債の発行を上回ることはまれでした。ところが、2013年以降は、QQEのもと、国債の発行額以上に日銀が国債を購入してしまっています。国債市場から国債を吸い上げてしまっている状況にあります。グレーの棒線もマイナスに突っ込んでいると思います。異次元の金融緩和と言われているのはこういう所以でもあります。

この結果、国債市場のプレーヤーはどうなっているか、というのを表したのが図表4です。ほとんどの投資家が2013年以降売っています。特に、黒色で示された「銀行」は、これまで国債投資を伸ばしていてグラフの上の方に出ていましたが。最近では、国債の売り側の方にいます。このため、国債を買おうとするとすごく高い価格、すなわち、低い金利で買わないといけない状況にあります。このように、最近では、長期金利は、経済の成長率の見通しだけでなく、国債市場の需給、その中でも日本銀行の国債購入という金融政策が直接的に関係していそうです。

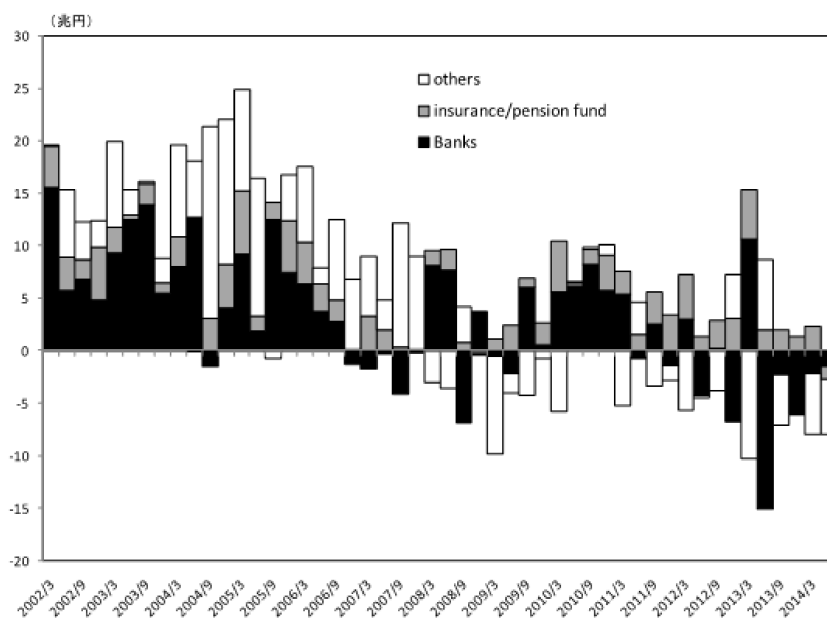
(図表 3)

The Demand-Supply Balance in JGB-Market



(図表 4)

The Demand-Supply Balance in JGB-Market



1-3. Previous Works and Our Approach

このように長期金利の見直しには国債の需給が関係してきそうだということは理解いただけたと思います。本研究は、債券先物オプションから導出される金利の分布にもこうしたことが影響するかどうか調べてみようというものです。

これまで、金利見直しと金融政策の関係という、「短期」金利の通しと金融政策の関係を調べるものが大半でした (References の文献)。特に、短期金利を、金融政策ルールの一つである、テイラールール、と比較しようというものが多いです。これらの研究では、オプションから計算された分布のモーメント (歪度、尖度) と金融政策のルールがどう関係するか調べています。

本研究では、短期でなく債券先物オプションから観測される長期金利の分布が、国債の需給によってどのような影響を受けるか調べてみようというものです。特に、分布のパーセント点がどのような影響を受けるか調べています。

2. Option Implied Long interest rate

債券先物オプションから観測される金利の分布は、以下のようなブラック・モデルを使用しています。すなわち、オプションの価格 V を、ストライクプライス K で、2階微分すると分布 $g(x)$ が導出されます (数学や物理に詳しい人であれば、コールオプションのペイオフの関数を2階微分するとディラックのデルタ関数となることから簡単に導くことができます)。

$$\begin{aligned} V &= e^{-rT} E[(S_T - K)^+] \\ &= e^{-rT} \int_K^{\infty} (x - K) g(x) dx \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial K} &= -e^{-rT} \int_{x=K}^{\infty} g(x) dx \\ \frac{\partial^2 V}{\partial K^2} &= e^{-rT} g(K) \rightarrow g(K) = e^{rT} \frac{\partial^2 V}{\partial K^2} \end{aligned}$$

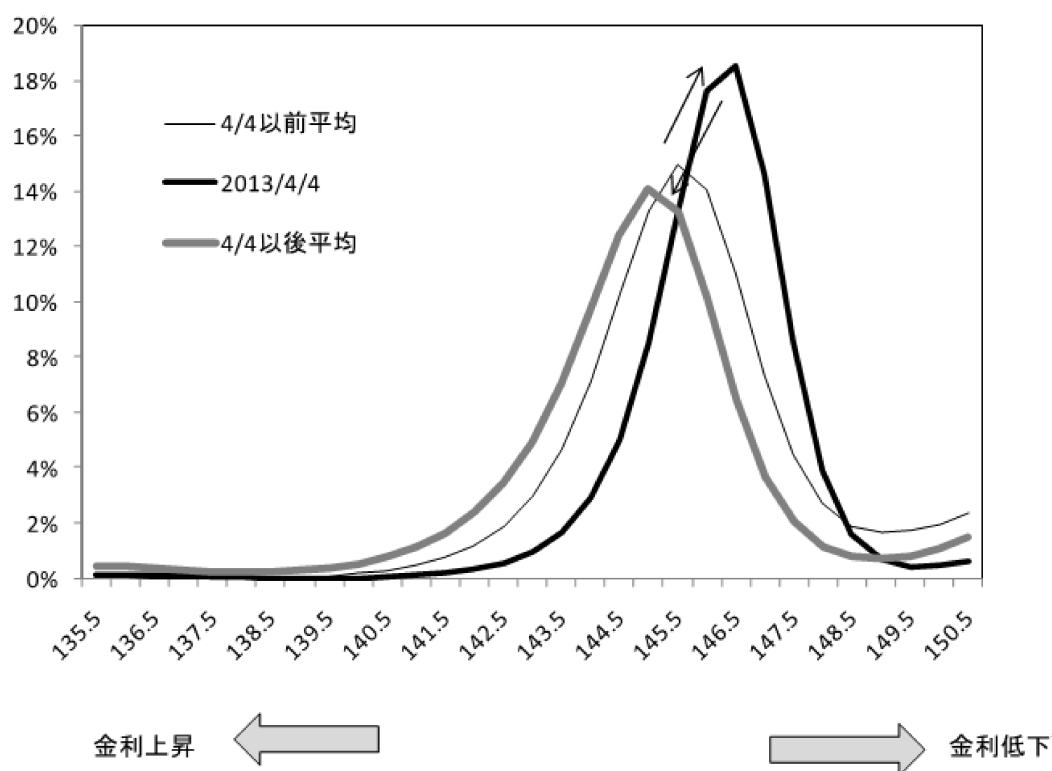
2-1. Case Studies: QQE1 (2013/4/4)

以下では、まず、ケーススタディとして、量的質的緩和（QQE）が導入された前後で分布がどのように変化したかをみてみます。

まずは、4/4日以前の1か月と、4/4日以降の1か月、それから、4/4日当日の動きをみたものが図表5です。分布の見方としては、右に行けばいくほど、債券価格が上昇して、金利が低下することを意味します。

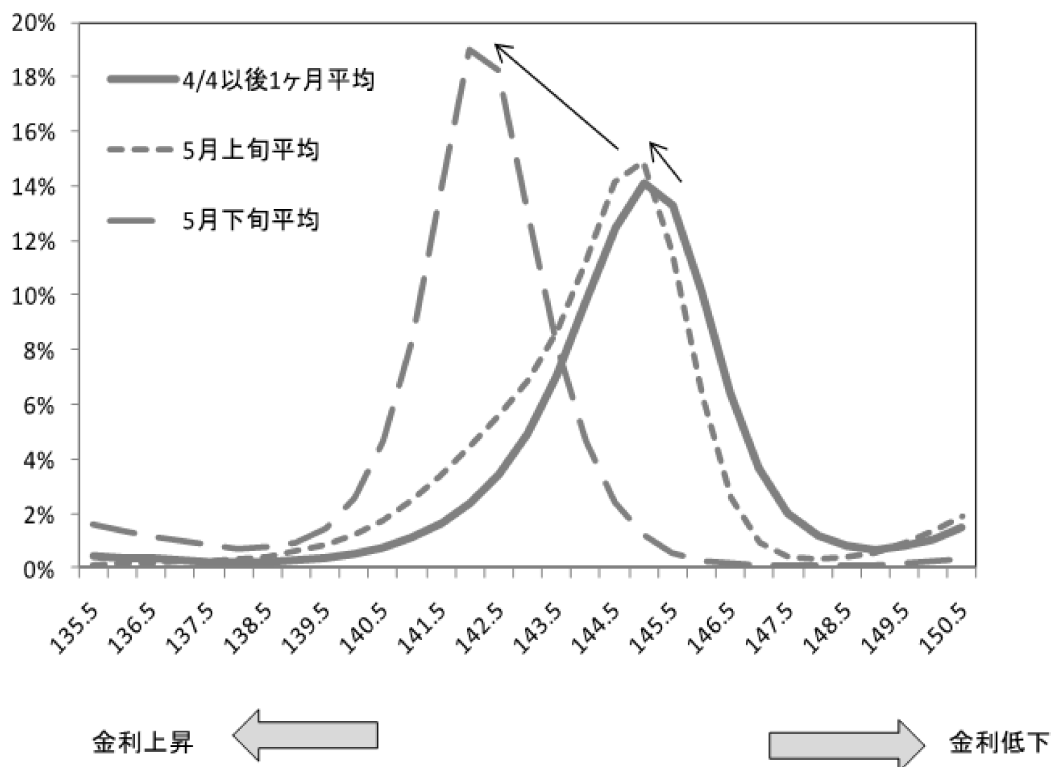
これをみますと、4/4日以前と比較して、4/4日はどうなったかという、金利が低下する方に分布がぐっと動きました。金利が上昇する確率はぐっと低くなっています。ところが、その後、むしろ金利が上昇する方向へ分布が戻ってしまいました。

(図表5)



それどころか、この後、5月になってからは、さらに金利が上昇する方向へ分布が傾いて行きます。それを見たのが図表6です。5月上旬に少し金利上昇の方向へ分布が傾いて、その後、5月下旬には、金利上昇の確率がぐっと高まっています。このように、国債を大量に購入することを発表した後、いろいろ市場参加者は、金利の見通しに関して、揺れていたということです。

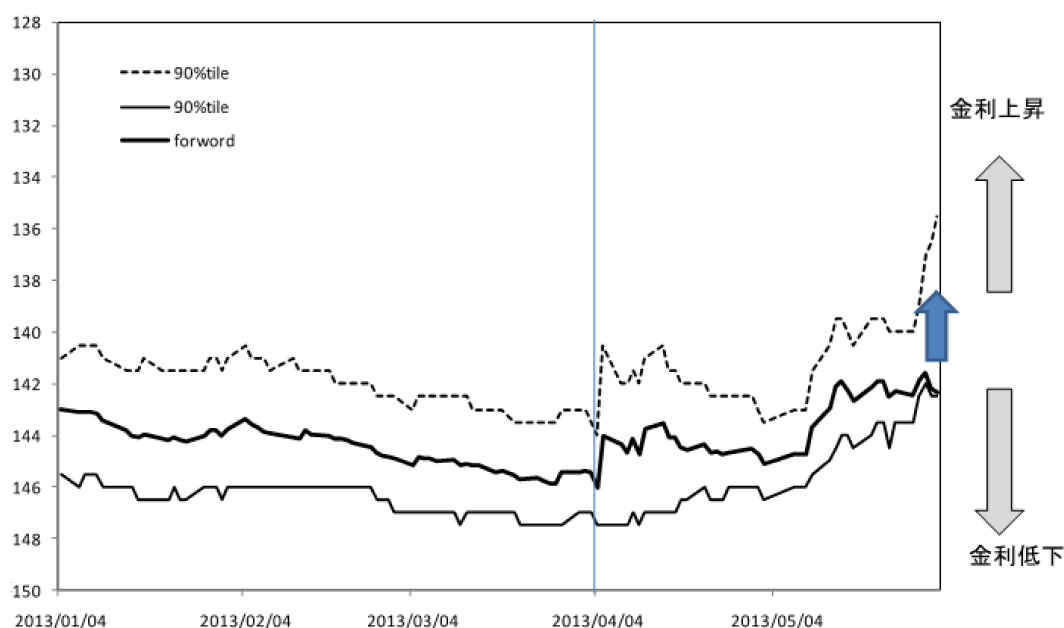
(図表 6)



4/4日に金利が低下する方向に傾いたのは、「国債の需給」を気にした動きだと思います。国債を大量に買うのであれば、金利が低下するというメッセージだと受けとめた訳です。一方で、その後の金利が上昇する方向に傾いたのは、将来的に景気が回復すれば、「名目成長率が高まる」ため、金利が上昇するのではと考えたものです。全く逆の解釈といえます。このようにQQE導入後は、2つの考えが入り乱れていました。すなわち、国債の需給による金利の低下を考える人と、景気回復による金利上昇を考える人の2つの考えです。このような2つの相反する動きがどのように入り乱れていったか、時系列で確認してみます。

さきほどの分布を時系列でみたものが図表7です。分布の平均値＝債券先物価格と、分布の上下90%点を描いたものです。これをみますと、QQE導入当日は、いったん金利が下がる方向に分布が傾きましたが、その後、跳ね上がります。それどころか、5月の月末に向かって、金利は上昇し、上下90%点をみても、かなり上昇方向へ分布が傾いていることがわかんと思います。

(図表 7)



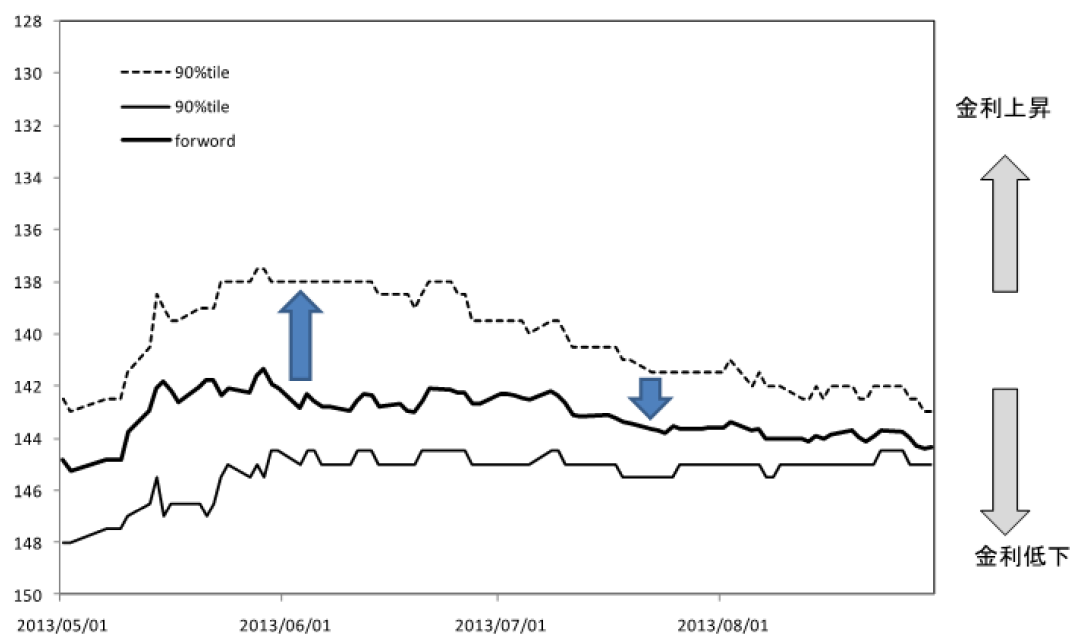
その後、6月以降どうなったかというのを図表8で確認すると、実は落ち着きを取り戻しています。オプションの限月が違うものでみているので、多少、さきほどと分布の形のイメージが違いますが、5月末から6月初にかけては、上側90点はかなり上の方にいて、金利が上昇する方に分布が傾いていると思います。それが、7月、8月と時間が経過するごとに、分布の90点はかなり縮小してきて、ボラタイルでなくなっていることがわかります。つまり、この時期になってようやく、従来の「名目成長率」ではなく、「国債の需給」が影響してきたと言えると思います。

その先は、8月から12月にかけて、かなり落ち着いた状況が続いていることがわかります（図表9）。

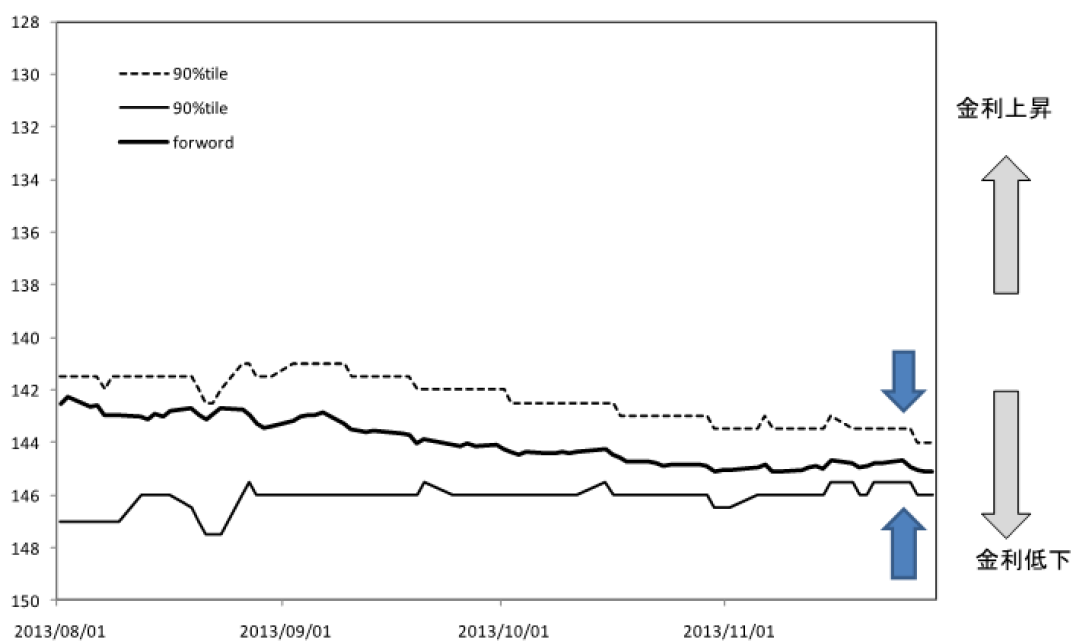
これらをまとめて、それぞれの限月を平均して長期時系列としたのが、図表10です。これをみると、QQE後は、少し混乱がありましたが、その後は、一部の時期を除けば、非常に落ち着いた状況が続いており、国債市場の需給がひっ迫していることが、金利を抑えていることがわかります。

このグラフに日銀の国債購入額を加えたのが、図表11です。国債の購入額の単位は億円です。もう少し長いデータでみてみると、明確な関係は見えてこないというのが正直なところですが、国債市場の需給ひっ迫が徐々に市場に浸透し、金利を抑えたことが確認できます。もう少し長期のデータを取得して統計的な分析を行うのが今後の課題です。

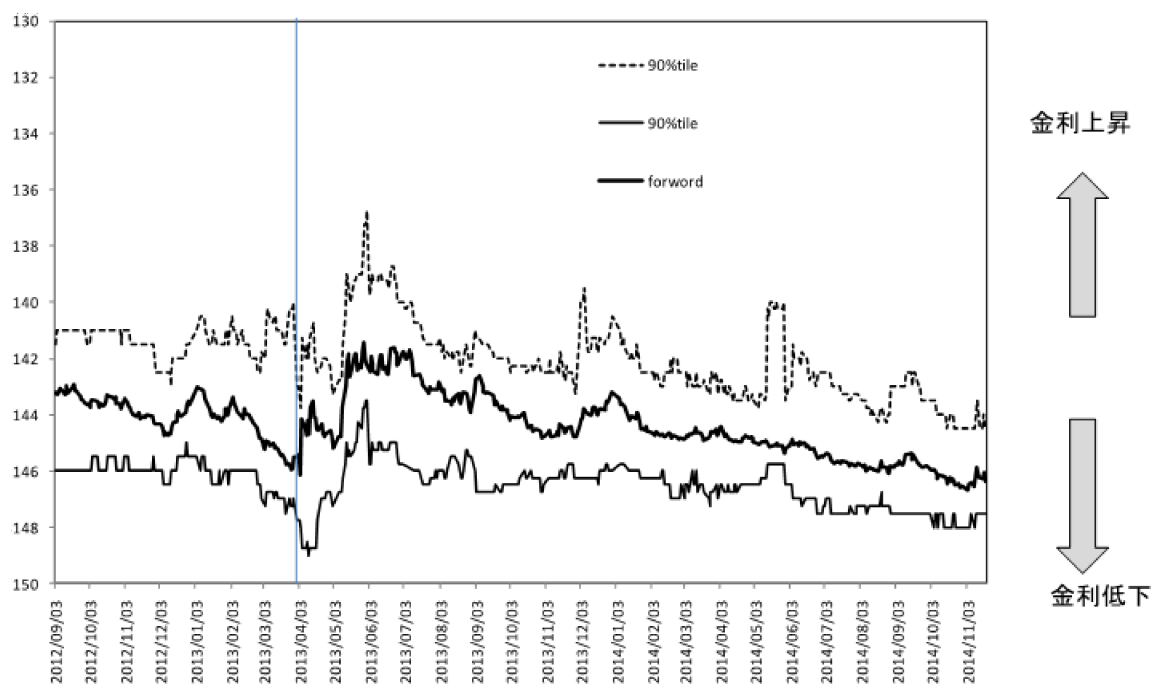
(图表 8)



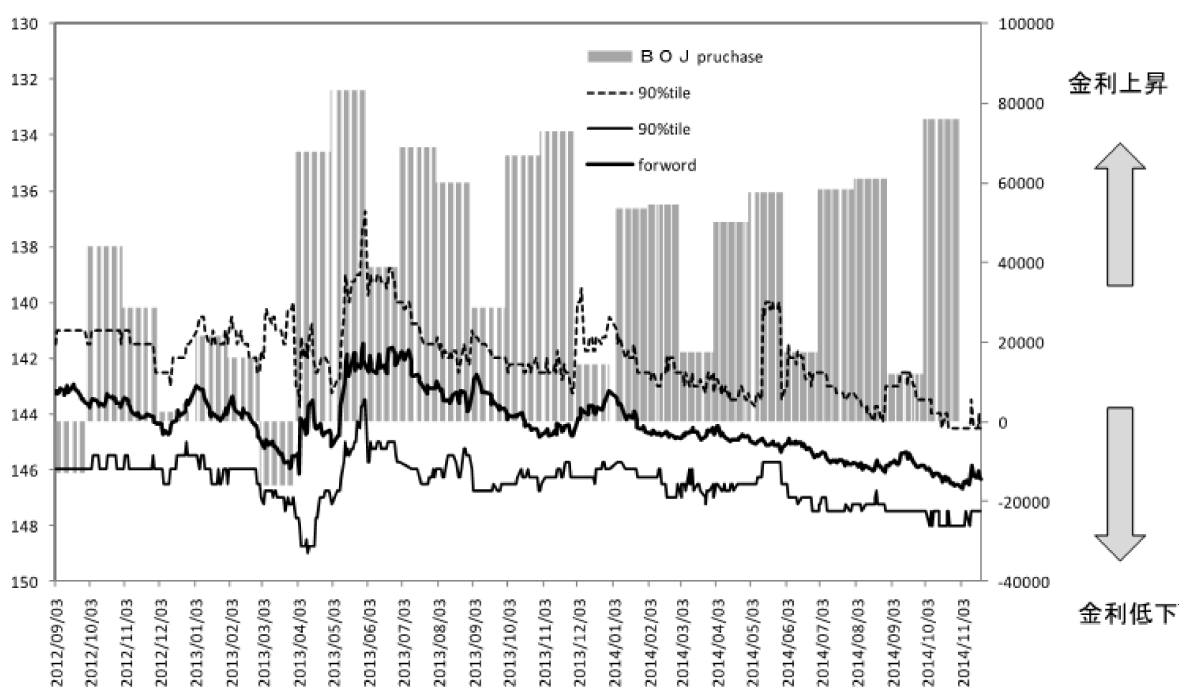
(图表 9)



(图表 1 0)



(图表 1 1)



2-2. Case Studies: QQE2 (2014/10/31)

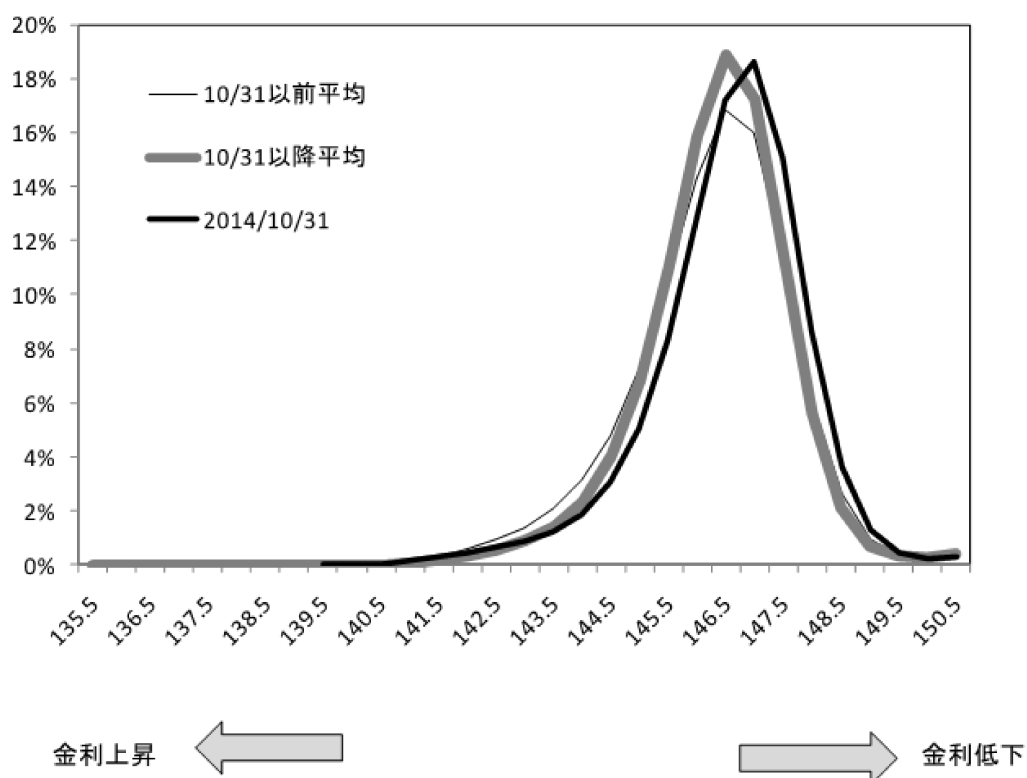
最後に、量的質的緩和の拡大（QQE2）が実施された前後で分布がどのように変化したかをみてみます。

予め結論を言うと、量的質的緩和導入（QQE1）の時と比較して、分布は殆ど動きませんでした（図表12～14）。QQE1以降、既に市場が慣れて混乱が生じなかったということもありますし、同時に GPIF（年金積立金管理運用独立行政法人）が積極的な株式の購入を決めたこともあり、引き続き債券市場に国債が相応に供給されるとの安心感から混乱に陥らなかったということもあるようです。

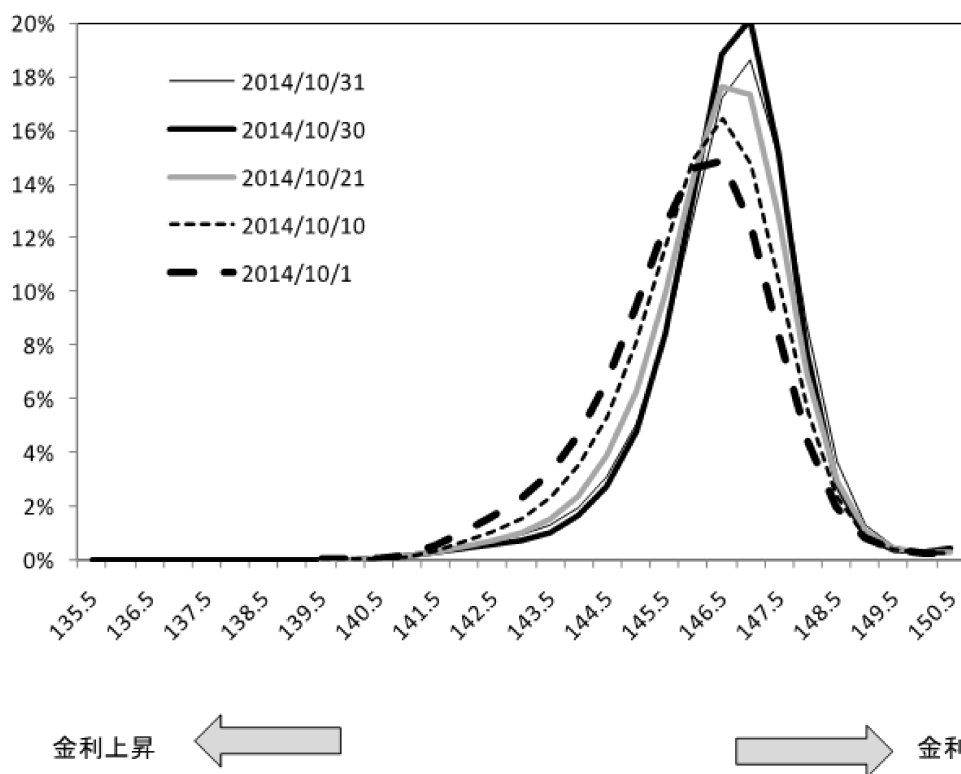
3. Conclusion

近年、中央銀行が大胆な金融緩和を行っていることから、短期金利だけでなく、長期金利の先行きの分布をみる上でも、国債の需給など中央銀行の政策の効果を考慮する必要があることが確認されました。今後は、より長期のデータを用いて、こうした現象の統計的分析が課題として残されています。

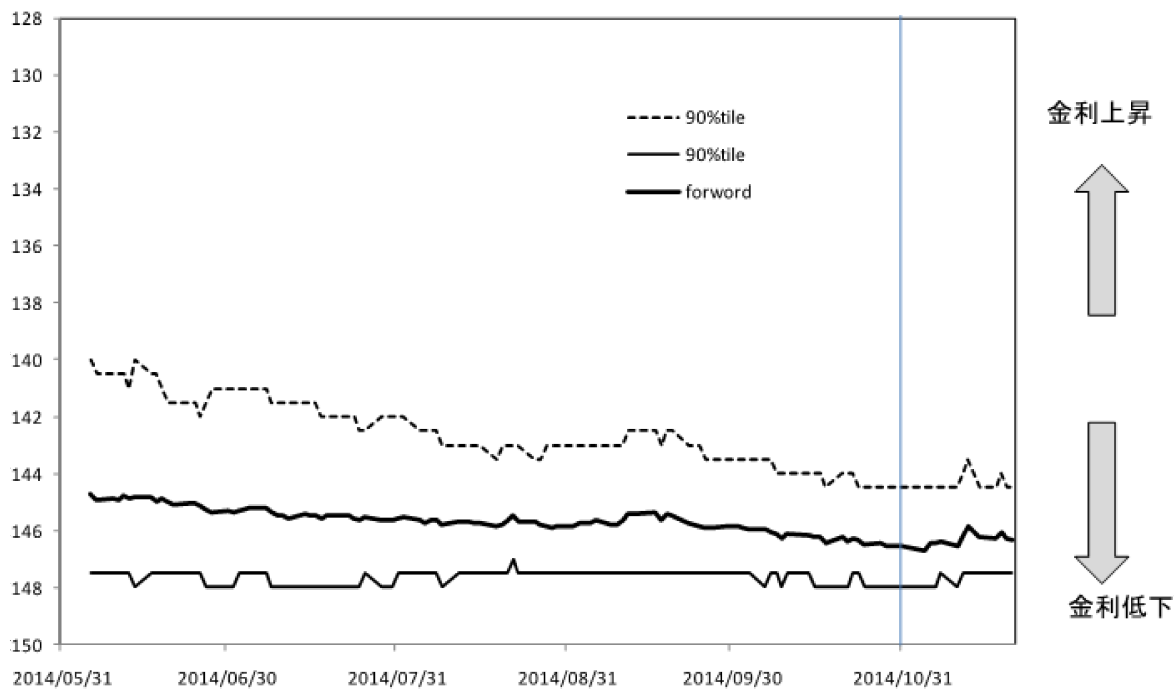
（図表12）



(图表 1 3)



(图表 1 4)



【References】

Sihvonen, Jukka and SamiVahamaa, "Forword-Looking Monetary Policy Rules and Opiton-Implied Interest Rate Expectations, "Journal of Future markets, 34(2) ,2014, pp.346 -373.

Bhar, R and C.Chiarella, "Expectations of monetary policy in australia implied by probability distribution of interest rate derivatives, "European Journal of Finance 6,2000, pp.113 -125.

Bank of Japan
Tokyo 103-0021
JAPAN
E-mail address: masaki.kimura@boj.or.jp

日本銀行 木村 真樹

Bank of Japan
Tokyo 103-0021
JAPAN
E-mail address: tetsuya.yamada@boj.or.jp

日本銀行 山田 哲也